研究会報告

マルチフラクタルパターンにおける相転移と保存則

名大工　　本田勝也

自己相似性という条件下ではあるが，フーリエ解析では捉え切れない複雑な図形を定量的に特徴づけ解析する手段としてフラクタル次元は非常に有効であり，多くの分野で適用されてきた．フラクタル研究は，その後マルチフラクタルへと発展してきており，ここではマルチフラクタルパターンの図形解析に統計力学的な概念や手法を導入することを考察する．

§1．マルチフラクタル次元の定義とその統計力学

与えられた図形を大きさℓの箱で$N(\ell)$個に分割し，それぞれの箱に確率（測度）$P_i(\ell)$ $(i=1,2,\cdots,N(\ell))$を割り当てる．この確率としては，図形が点の集合でできている場合には，i番目の箱内にある点の割合$P_i(\ell)=N_i/N$を採用しても良いし，または物理的に興味ある他の量をもってきても良い．マルチフラクタル次元D_qは実数qに対して次式で定義される．[1]

$$D_q = \lim_{\ell\to 0}(q-1)^{-1}\ln Z_\ell(q)/\ln\ell, \tag{1}$$

$$Z_\ell(q) = \Sigma_i[P_i(\ell)]^q. \tag{2}$$

この定義より，q=0 の場合は集合の台（support）のフラクタル次元，q=1 の場合は情報次元を与えることが理解される．このようにマルチフラクタル次元は，これまで種々に定義されてきたフラクタル的次元を含んでおり，単なる一つの量にすぎないフラクタル次元をqの関数として拡張したものである．また，図形における確率を，一様であると近似して，$P_i(\ell)=1/N(\ell)$とおけば，D_qはqに依存しない定数(＝台のフラクタル次元)になる．したがって，単なるフラクタル次元だけでは図形における測度の非一様性を無視することになり，より詳細な情報を図形から抽出するためにはマルチフラクタル次元を考察する必要がある．

さらにHalsey達[2]はより実体論的なsingularスペクトラムを導入した．i番目の箱の確率が指数則$P_i(\ell)\sim\ell^{\alpha_i}$に従い，$\alpha_i$が$\alpha$と$\alpha+d\alpha$にあるような箱の数が$\rho(\alpha)\ell^{-f(\alpha)}d\alpha$と表されると仮定する．$f(\alpha)$はsingularity αをもつ部分集合のフラクタル次元である．分配関数(2)はαの積分に置き直して

$$Z_\ell(q) = \int d\alpha\,\rho(\alpha)\ell^{q\alpha-f(\alpha)} \tag{3}$$

となるが，これはさらに鞍部点法を用いて

$$Z_\ell(q) \sim \ell^{q\alpha(q)-f(\alpha(q))}, \tag{4}$$

と評価される．ここで$\alpha(q)$は

$$df(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha(q)} = q \tag{5}$$

で与えられる．(1) 式と(4) 式から$\tau(q)=(q-1)D_q$で定義される$\tau(q)$は

$$\tau(q) = q\alpha(q)-f(\alpha(q)) \tag{6}$$

として導かれる．$\tau(q)$をルジャンドル変換して$f(\alpha)$は

$$\alpha(q) = d\tau(q)/dq, \tag{7}$$

$$f(q) = q\alpha(q)-\tau(q) \tag{8}$$

と，パラメターqを介して表される．

さて，上記の定式は図形の分割を適当に考え直すと統計力学と同一の形式になることが知られている．[3]簡単のため1次元的に配列した図形を考える．高次元への拡張は容易である．図形の中央で半分に分け，左半分にs=-1を，右半分にs=+1を割り当てる．さらにそれぞれの部分を半分割して左から順に(-1,-1),(-1,+1),(+1,-1),(+1,+1) とする．このよ

うな分割をn回続けると，大きさ$\ell=(1/2)^n$に細分割された各々の部分にn個の+1と-1とからなる数列$\{s\}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$が割り当てられる．したがって，i番目の箱に付随した確率$P_i(\ell)$ は$P(\{s\})$と表される．もし，情報量を用いてハミルトニアンを

$$\mathcal{H}(\{s\}) = -\ln P(\{s\}) \tag{9}$$

と定義すると，分配関数$Z_\ell(q)$は

$$Z_n(q) = \Sigma_{\{s\}}\exp[-q\mathcal{H}(\{s\})] \tag{10}$$

と表され，統計力学におけるそれと同一の形式になる．逆温度に相当するqは$-\infty\leq q\leq\infty$であることに注意する．$f(\alpha)$スペクトラムの導出過程から次の熱力学との対応関係は自明と言えよう：$\alpha\leftrightarrow$エネルギー；$f\leftrightarrow$エントロピー；$\tau\leftrightarrow$自由エネルギー．

§２．分割過程に相関がある図形

(10)式は，１次元イジングスピン系の分配関数と同じ形式であることに注目して，逆に適当にハミルトニアン$\mathcal{H}(\{s\})$を設定し，それが生成する図形を議論する．このことによって，図形を解析する一般的な方法を確立することが目的である．§1で述べたように，図形の各部分にスピン配位を割り当て，$\exp[-\mathcal{H}(\{s\})]$に比例する点を$\{s\}$に相当する領域内に分布させて図形を作成する．

１次元イジングスピン系の典型例である，最近接スピン間の相互作用J，外場Hのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}(\{s\}) = -J\Sigma_i s_i s_{i+1} - H\Sigma_i s_i \tag{11}$$

で与えられる．図形解析の言葉で表現すれば，(11)式によって生成される図形は分割の過程に"記憶"効果があるためマルコフ分割ができず，確率は

$$P(\{s_n\}) = \Pi_i P_1(s_i)\Pi_i P_2(s_i,s_{i+1}) \tag{12}$$

の形になる．P_1とP_2それぞれに独立なsingurality が存在しうるので，分配関数(2) 式は

$$Z_n(q,\eta) = \Sigma_{\{s\}}[\Pi_i P_1(s_i)]^{\eta}[P(s_1,s_2,\cdots,s_n)]^q \tag{13}$$

と拡張される．規格化条件から$Z_n(1,0)=1$ である．(9) 式よりハミルトニアンが規格化定数を除いて(11)式で与えられることは明らかであろう．前述した方法によって生成される図形が図１に示されている．この図形に対する分配関数は統計力学の簡単な演習問題で求められる．singularity スペクトラム$f(\alpha)$は，エネルギーαと磁化ψ ($=\Sigma_i\langle s_i\rangle/n$) の関数になり，図２のように与えられる．$\psi=0$ 面に射影すれば$f(\alpha)$曲線の内部にもsingurality が存在する．以前[3]に議論したhidden singularityの別例である．

図１

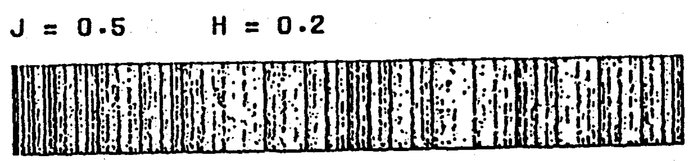
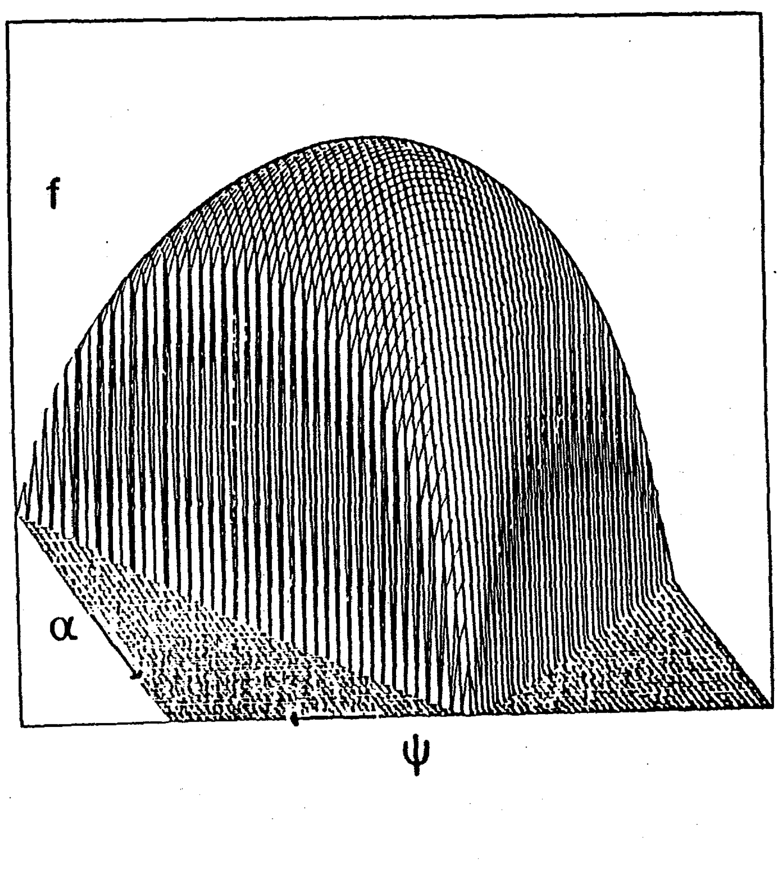


図２



§3．図形の相転移

伏見・テンパリー模型は1次元でも相転移を示す．そのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}(\{s_i\}) = -(J/n)\Sigma_i\Sigma_{j(i\neq j)}s_i s_j \tag{14}$$

で与えられ，$q=1/J$ で2次の古典的相転移をする．$f(\alpha)$スペクトラムにも相転移の異常性が反映されて図3のような新奇なグラフになる．図形の相転移現象は奇異な感じを与えるかもしれないが，今後の発展によっては有用な概念になると期待される．特にDLAパターンにおけるq相転移はDLA研究を奥深いものにすると期待され興味深い．[4)]

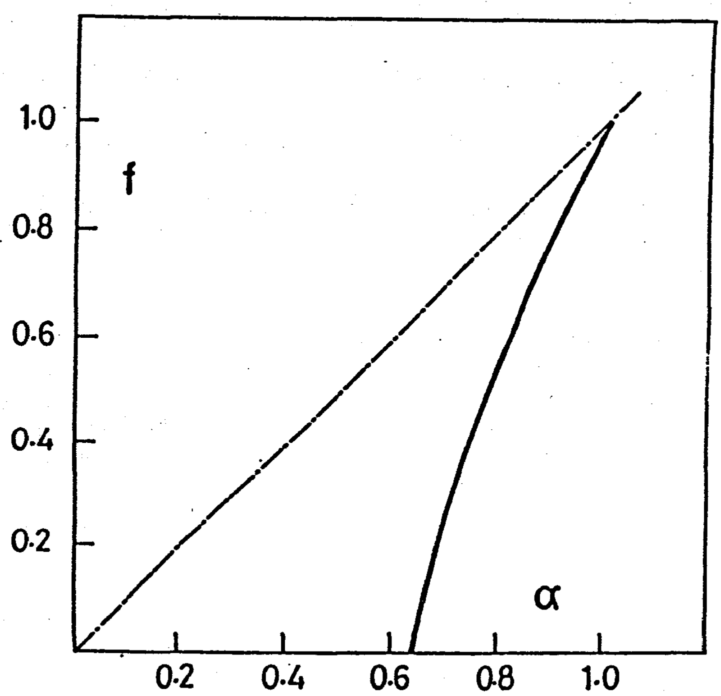


図3

§4．空隙のある図形

これまでの例において，確率が0である領域（空隙）は存在しなかった．しかし，成長するフラクタルパターンには空隙はつきものであり，しかも非常に小さい確率の領域と区別することが困難な場合が多い．このような空隙は「禁じられたスピン配位空間」に相当している．例えば，パターンに保存量を導入することによって空隙を取り入れることが出きる．ハミルトニアン(11)式で表されるパターンに「磁化」$m=\Sigma_i s_i/n$が保存されるとすると，分配関数は

$$Z_n(q) = \Sigma'_{\{s\}}\exp[-q\mathcal{H}(\{s\})]/\{\Sigma'_{\{s\}}\exp[-\mathcal{H}(\{s\})]\}^q \tag{15}$$

で与えられる．ここでΣ'は$\Sigma_i s_i=mn$ の条件下で実行することを意味する．このようなパターンの例は図４に与えられている．分配関数(15)式は大分配関数

$$\Xi(q,\eta) = \Sigma_{\{s\}}\exp[\eta\Sigma_i s_i]\exp[-q\mathcal{H}(\{s\})] \tag{16}$$

を導入し，ルジャンドル変換によって計算できる．その求められた結果の$f(\alpha)$は図５に示されている．この図は図２において$\phi=m$ の平面による切断面であることに注意する．

図４

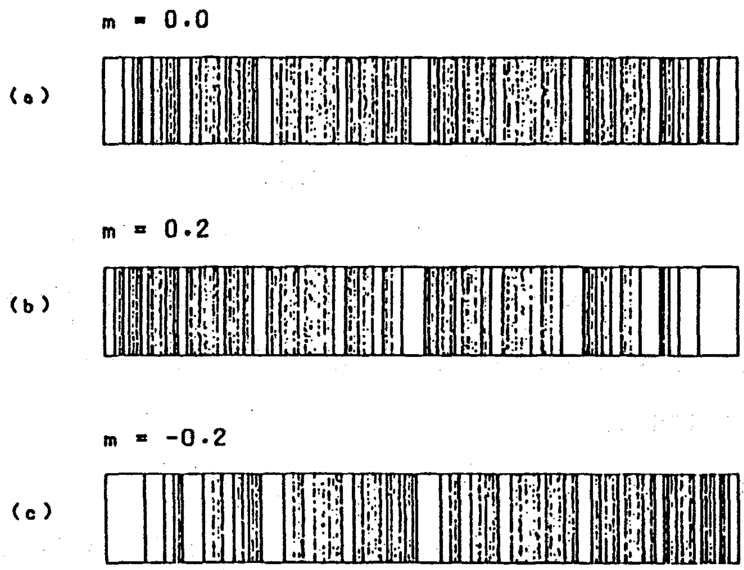
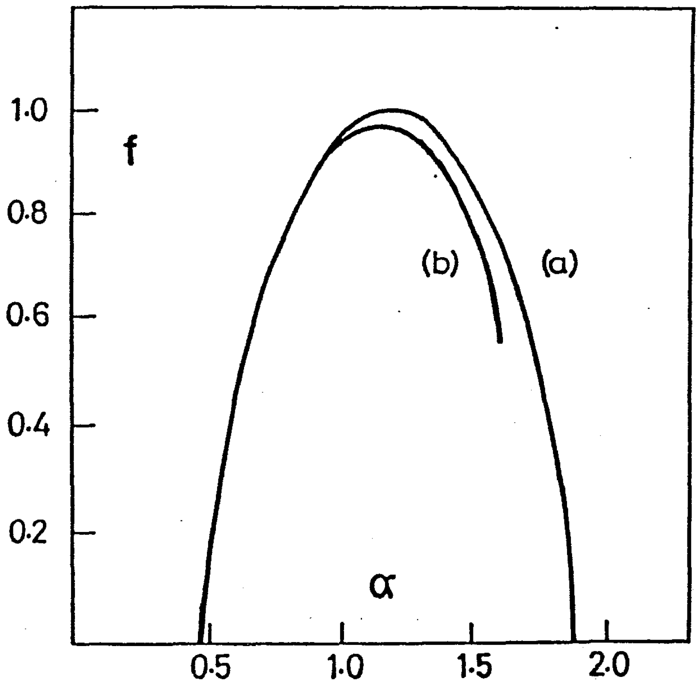


図５



§5．まとめ

マルチフラクタルパターンを統計力学的手法にしたがって解析する方法を提示し，さらにパターンの相転移や保存則の概念を導入した．これらは図形解析に興味あるキーワードになることが期待されるが，具体的な適用は今後の課題である．

文献

1）A.G.E.Hentschel and I.Procaccia, Physica 8D,435(1983).

2）T.C.Halsey, M.H.Jensen, L.P.Kadanoff, I.Procaccia and B.J.Shraiman, Phys.Rev. A33,1141(1986).

3）本田勝也，松下貢，物性研究 50,332(1988).

4）J.Lee and H.E.Stanley, Phys.Rev.Lett.61,2945(1988).